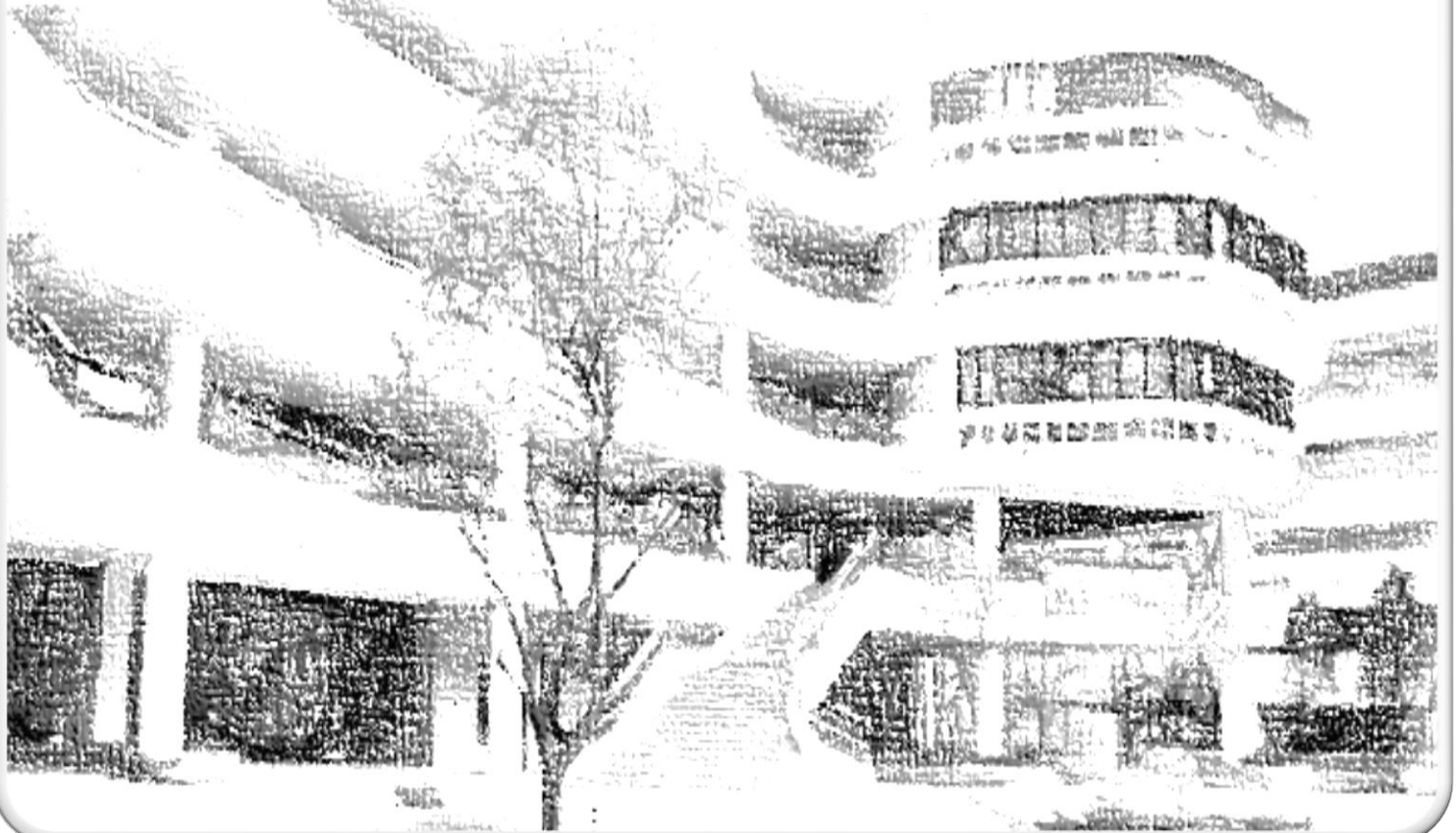


# 數字搜查線



明道中學 二零八學年度 上學期

高一數學 課程學習成果

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_



## 線索一 學習活動

### 影印紙的數學


ISO(國際標準化組織, International Organization for Standardization)是一個成員遍布 162 個會員國的國際組織, 主要工作是制定工商業的國際標準。ISO 制定的各種標準都有編號, 比如 ISO 6709 用來標記地區的緯度與經度(在 ISO 6709 中, 臺灣的位置表示為  $+2330+12100$ , 即北緯 23.3 度, 東經 121.00 度)。

影印店中常用的最大影印紙是 A3, 將長邊對折裁成兩半後就是家中印表機的 A4 影印紙。用相同方法把 A4 再裁一半, 就是 A5。以此類推, ISO 216 制定了影印紙的規格, 標準如下:

紙張	ISO 216 長寬 (尺寸單位: 毫米)
A2	594×420
A3	420×297
A4	297×210
A5	210×148

#### 問題

1. A6 的影印紙尺寸是多少?


 2. 用計算機(或手算)計算這四種紙張長與寬的比值, 四捨五入至小數點後第三位。你發現了什麼?

為了節省材料的實際需求，人們希望紙的長寬比例要使得對半裁切後，依然維持相同的長寬比（比如 2：3 就不好 — 攔腰裁半後長寬比例改變，不僅不方便也浪費材料）。

3. 如果影印紙長與寬的比值要使得對半裁切後維持相同，請問長與寬的比值必須要是多少？

問題 3 的答案解釋了問題 2 的現象，所以影印紙的大小比例是有數學上的道理的！

4. 紙廠待裁的最大紙張是 A0。利用問題 3 的結果，可反算得到 A0 的大小是多少？

 5. 實際上，ISO 216 規定 A0 的大小是面積為一平方公尺。利用問題 3 的結果與 ISO 216 的規定，求出 A0 的紙張尺寸，並和問題 4 比較。

另一種常見的影印紙是 B 系列，ISO 216 規定

$$B4 \text{ 的長} = \sqrt{A4 \text{ 的長} \times A3 \text{ 的長}},$$

$$B4 \text{ 的寬} = \sqrt{A4 \text{ 的寬} \times A3 \text{ 的寬}},$$

其他 B 尺寸的紙也類似定義（B5 就用 A5 與 A4 來計算）。

6. 試說明這樣規定之下紙的比例仍然是好的（即長與寬的比值與問題 3 求出的答案相同）。

### 《延伸探討》

除了影印紙的邊長比例，數學上尚存在許多特殊的比例，其中又以黃金比例最為出名。

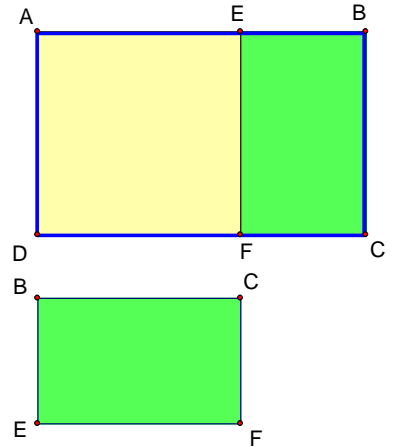
**黃金比例**：一條線段分割成兩段，當長線段與短線段之比等於全線長與長線段之比，該比為黃金比例，其比值記作  $\Phi$ 。

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \Phi$$

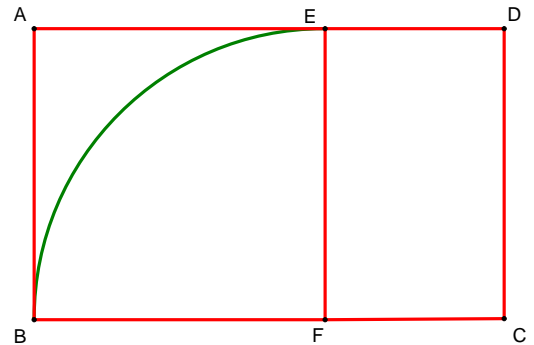


$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.6180339\dots$$

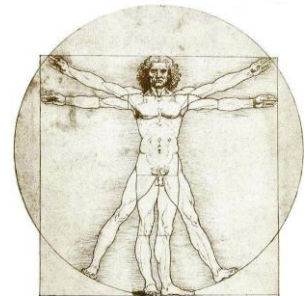
**黃金矩形**：將矩形 ABCD 分割兩塊，其中一塊 AEFD 為正方形，另一塊 BCFE 為矩形，若矩形 ABCD 和矩形 BCFE 相似，則稱矩形 ABCD 為黃金矩形，此時  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi$ 。



**黃金螺線**：黃金矩形 ABCD，作正方形 AEFB，以 F 為圓心，線段 AB 為半徑，作弧 BE；如此重複此步驟，即可得一螺旋狀曲線，此曲線稱為**黃金螺線**(等角螺線)。



7. 試找尋數學上特殊比例的相關延伸研究(可用黃金比例當探討主題)，並製作心得報告。  
(紙張不夠書寫時，可自行加頁)





## 線索二 學習活動

### 噪音與分貝

音源於聲波，聲波由於空氣壓力變化而產生。因此強音有較大的聲壓，弱音則較小。在物理學上，衡量壓力的單位為帕斯卡（Pa），定義為牛頓／平方米（ $N/m^2$ ）。

人類耳朵是非常精巧的器官，能感應聲壓的範圍非常大。因此引進微帕斯卡  $\mu Pa$ （ $1 Pa = 10^6 \mu Pa$ ； $\mu$  讀作“mu”）。太空梭引擎能產生  $2 \times 10^9 \mu Pa$  的噪音，而正常的人耳能夠聽到最微弱的聲音叫作“聽閾，”為  $20 \mu Pa$ 。

#### 問題

#### 1. 太空梭的引擎聲是多少 Pa？聽閾是多少 Pa？

下表大致列出不同聲響的強度，單位是  $\mu Pa$ 。

發射時的太空梭引擎	2000000000
全力發出最大聲響的交響樂團	2000000
柴油火車引擎	200000
兩人正常交談	20000
圖書館中與鄰座的悄悄話	2000
隔音的廣播播音室	200
人類耳朵能夠聽到最微弱的聲音（聽閾）	20

因此，如果用  $\mu Pa$  為單位來處理聲音，要用到小至 20，大至 2000000000 的數字，這實在很不方便。因此利用常用對數引進了分貝（dB）。我們規定聽閾為 0 分貝（即用  $20 \mu Pa$  為基準的聲壓）。其他的聲音有多少分貝？用這個公式計算：

$$\text{某聲音的分貝} = 20 \times \log \left( \frac{\text{量到的聲壓}}{\text{基準聲壓}} \right)。$$

#### 2. 說明用這個公式計算聽閾會得到 0 分貝（因此這個公式至少沒有矛盾）。

3. 兩個人正常交談發出的聲音是幾分貝？

4. 發射時的太空梭引擎發出的聲音是幾分貝？

由生物學知道人類聽覺反應是基於聲音的相對變化，而非絕對的變化。分貝的定義也是源於相對的聲壓，正好能模仿人類耳朵對聲音的反應。

有趣的是，當兩個聲音一起發出時，分貝不是單純求和而已，而是要從總聲壓再利用分貝公式求得。由表格可計算出圖書館中兩人的悄悄話為 40 dB，但是兩組人一起說悄悄話，並不是 80 dB，而是約

$$20 \times \log\left(\frac{2 \times 2000}{20}\right) \approx 46 \text{ dB}。$$



5. 足球比賽或職棒比賽，熱情的球迷都會用瓦斯氣笛加油。一支瓦斯氣笛可以發出 80 分貝的聲音。請問滿場有一千支瓦斯氣笛一起火力全開，可以發出幾分貝的聲音？

### 《延伸探討》

除了分貝外，還尚有許多以指數或對數產生的公式，如

**芮氏地震規模**：地震規模的觀念是由芮氏在 1935 年所提出的，稱為芮式地震規模，用符號  $s$  表示。地震能量是地震所釋放的能量，用符號  $w$  表示。芮氏根據經驗法則，於 1966 年提出芮氏地震規模  $s$  與地震能量  $w$  的參考關係式為

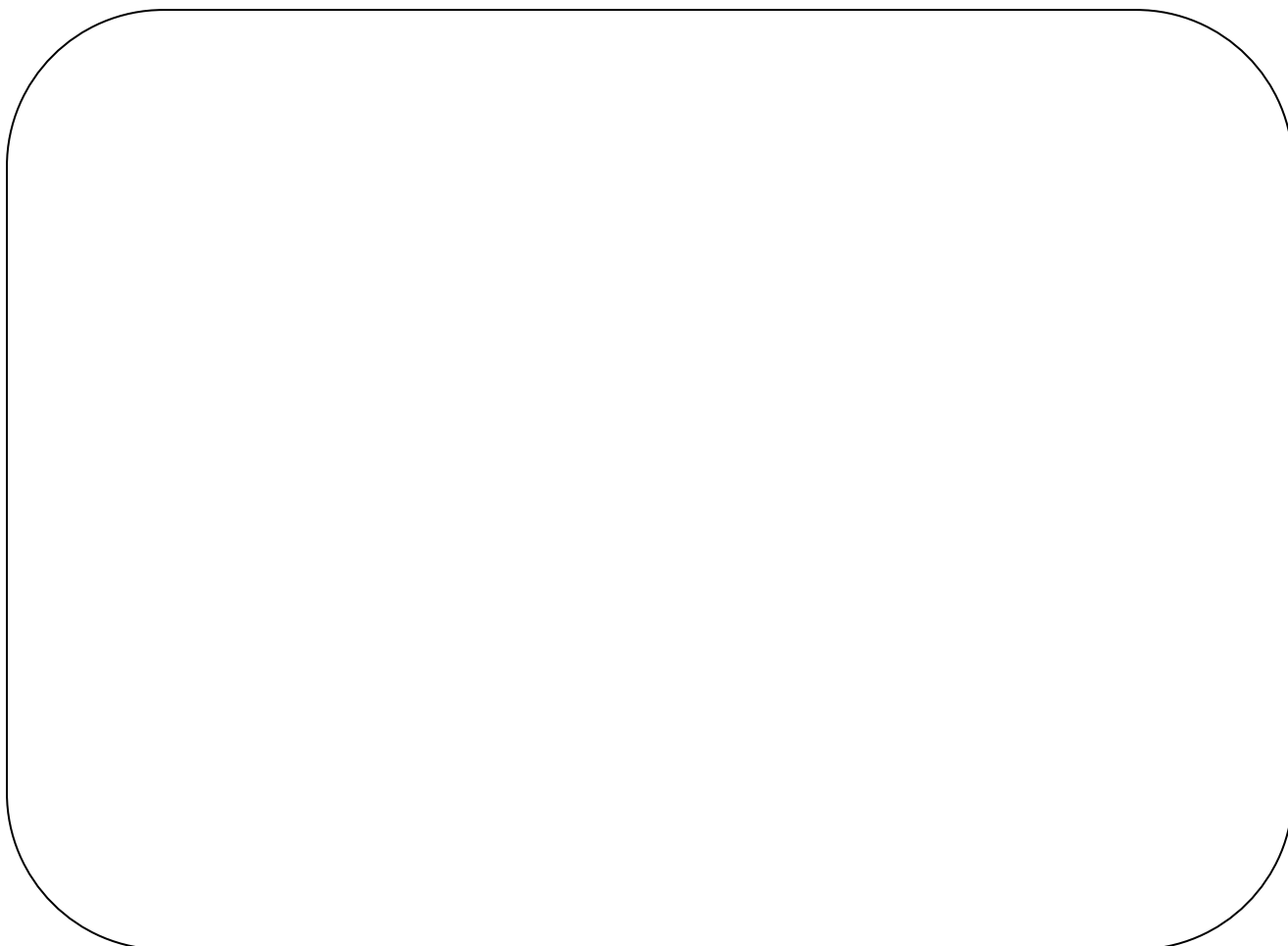
$$\log_{10} w = 5.24 + 1.44s$$

**韋伯-費克納定律**：德國生理學家韋伯與科學家費克納作出一個數學定律，用來度量人對各種身體刺激的反應。發現這種關係，說：「人類對任何刺激的反應與這些刺激的對數成比例。」可以用數學式子表示為

$$s = a \log_{10} w + b$$

其中  $s$  代表人體器官對刺激的感受強度， $w$  代表刺激量的大小，而常數  $a$ ， $b$  跟環境與刺激物的種類有關。

6. 試找尋以指數或對數產生的公式與相關延伸研究(可用上述例子當探討主題)，並製作心得報告。(紙張不夠書寫時，可自行加頁)





## 線索三 學習活動

### 身體質量指數 BMI

身體質量指數 (Body Mass Index, 簡稱 BMI) 是由身高與體重所算出來的一個數值。由十九世紀中期的比利時統計學家及數學家凱特勒 (Lambert Adolphe Jacques Quetelet, 1796~1874) 最先提出。它的原始定義是

$$\text{BMI} = \frac{W}{H^2},$$

其中  $W$  是體重，單位為公斤， $H$  是身高，單位為公尺。

#### 問題

1. 某位女同學的身高為 150 公分，體重為 45 公斤，試問她的 BMI 為多少？

2. 試計算你自己的 BMI。

BMI 原先的設計是一個用來分析肥胖因素影響健康的研究工具。當研究人員想知道肥胖是否為致病原因時，可以將病人的身高及體重換算成 BMI，再找出其數值與各種疾病的發生率是否有關聯。現在，BMI 成為了一個可以自我檢測體重是否過重或過輕的簡單指標。

我國衛生福利部根據學界與醫界相關研究，參考各國標準，於 2002 年 4 月公布臺灣成人的 BMI 與體重分類，如下表：

過輕	$\text{BMI} < 18.5$
正常	$18.5 \leq \text{BMI} < 24$
超重	$24 \leq \text{BMI} < 27$
肥胖	$\text{BMI} \geq 27$



3. 一個身高 170 公分的成人，身體質量指數 BMI 為正常時，體重的範圍為何？

4. 一個體重 70 公斤的成人，身體質量指數 BMI 為正常時，身高的範圍為何？

### 《延伸探討》

除了身體質量指數，尚有許多以數學公式所定義的指數，如

空氣質量指數(AQI)公式:

$$I_p = \frac{I_{Hi} - I_{Lo}}{BP_{Hi} - BP_{Lo}}(C_p - BP_{Lo}) + I_{Lo}$$

這個公式可以以 SO<sub>2</sub>、NO<sub>2</sub>、PM<sub>10</sub>、PM<sub>2.5</sub>、O<sub>3</sub>、CO 這些污染物的濃度值來計算出空氣質量指數。IP 代表 P 這個污染物的空氣質量指數；I<sub>Hi</sub> 和 I<sub>Lo</sub> 分別代表了與 BPHi 和 BPLo 對應的空氣質量指數；BPHi 和 BPLo 分別為污染物 P 濃度限值的高位值和污染物 P 濃度限值的低位值。可以利用計算這個公式所得到的指數來判斷一個地區的空氣質量指數的好壞。

5. 試找尋各種指數與相關延伸研究(可用上述例子當探討主題)，並製作心得報告。  
(紙張不夠書寫時，可自行加頁)



## 線索四 學習活動

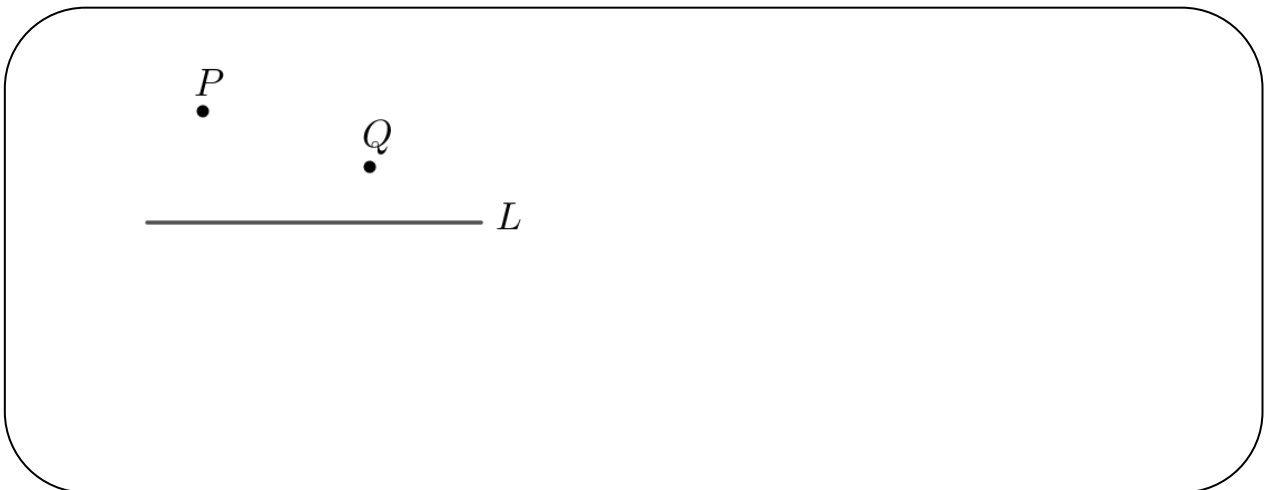
### 反射軌跡



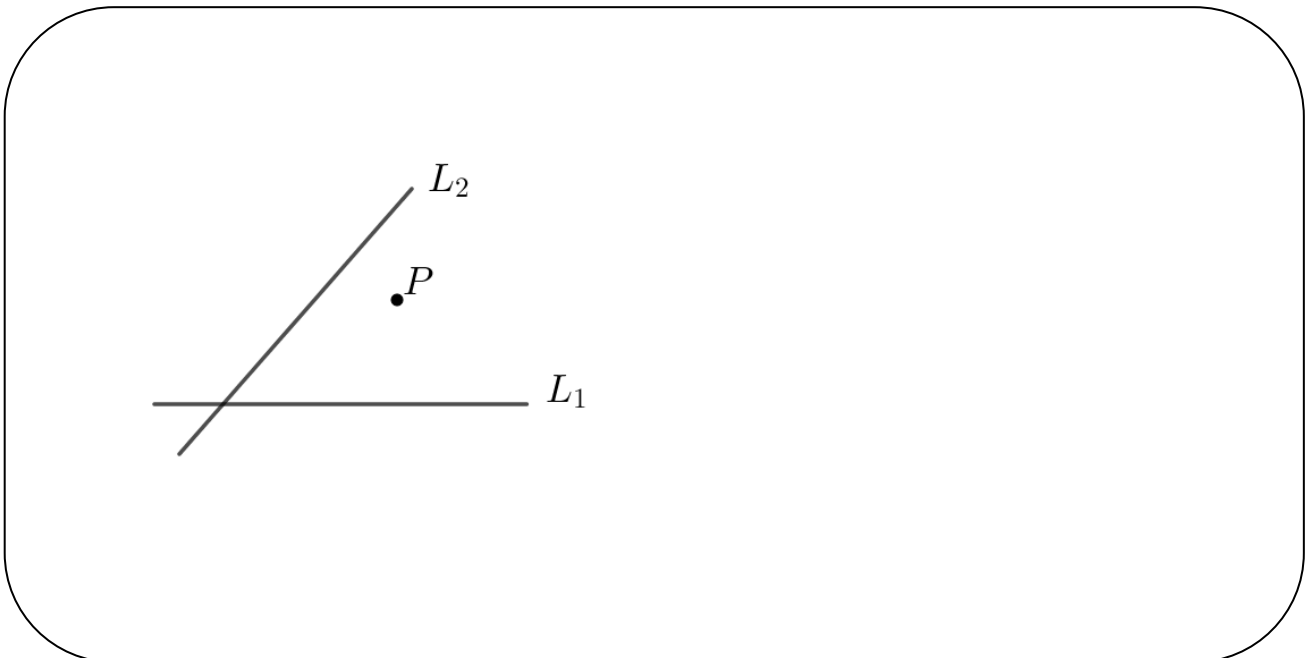
迄今留存的最早光學著述是希臘思想家歐幾里得(Euclid)的作品，他著手研究幾何光學，並從數學視角為文著述。他論述物體尺寸和該物與眼睛距離的關係，並說明反射定律：由於入射角等於反射角，因此反射影像位於鏡後的距離等於該物體位於鏡前的距離。約 300 年後，另一位開創新局的希臘數學家亞歷山大的希羅(Hero of Alexandria)證明，在相同介質中傳播的光始終依循最短可能路徑前行。舉例來說，倘若光只在空氣中傳播，這束光就完全不會偏折。他察覺，以平鏡面反射光，並不違背這項原理，再次證明入射角和反射角是相等的。

#### 問題

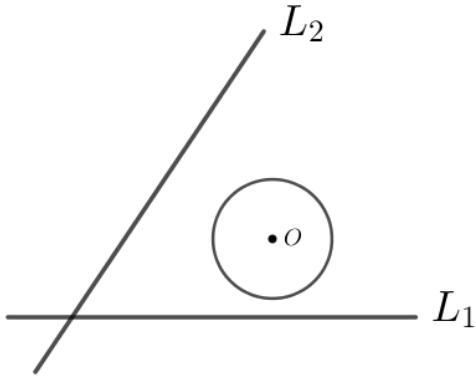
1. **兩點一線**：已知一直線 $L$ 及位於 $L$ 同側的相異兩點 $P$ 、 $Q$ ，求直線 $L$ 上動點 $R$ ，使得 $\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{RQ}$ 和最小。(請使用尺規作圖，並寫下做法)



2. **一點兩線**：已知兩直線 $L_1$ 、 $L_2$ 及不在線上的點 $P$ ，求兩線上各找一點 $Q$ 、 $R$ ，使得 $\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{RQ}$ 和最小。(請使用尺規作圖，並寫下做法)



3. **兩線一圓**：給定兩相交直線 $L_1$ 、 $L_2$ 及與直線不相交的圓 $O$ ，若此時圓 $O$ 位於兩線的銳交角部份，分別在直線 $L_1$ 、 $L_2$ 、圓 $O$ 上找出動點 $P$ 、 $Q$ 、 $R$ ，使得 $\overline{PQ} + \overline{PR} + \overline{RQ}$ 和最小。  
(請使用尺規作圖，並寫下做法)



《延伸探討》

上述的反射軌跡，尚有**三個點**、**一點兩圓**、**兩點一圓**、**一點一線一圓**、**三線**、**一線兩圓**、**三圓**等相關延伸問題，請試著製作一份心得報告。(紙張不夠書寫時，可自行加頁)